651. *Határozzuk meg az* $y = \frac{x^3+ax^2+bx+c}{mx^3+nx+p}$ *törtben szereplő* a, b, c, m, n, p *eggyüthatókat, ha tudjuk a következőket:*

1. A tört $x = 2$ *értékre eltűnik;*

2. minden határon túl nő, ha x *az* 1*-hez tart;*

3. ha $x = -1$*, akkor a tört* $\frac{0}{0}$ *alakú lesz, és ekkor határértéke:* -6*;*

4. az $x = 3$ *és az* $x = 4$*-hez tartozó értékek egymás reciprokai.*

Megoldás: A számláló az 1. és 3. pont értelmében az $x = 2$ és $x = -1$ értékre eltűnik így osztható $(x+1)(x-2)$-vel, alakja tehát $(x+1)(x-2)(x-\lambda)$.

A nevező nullhelyei a 2. és a 3. pont szerint $+1$ és -1, így alakja: $m(x-1)(x+1)$ és a tört:

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-\lambda)}{m(x-1)(x+1)}.$$

Ez az $x = -1$ helyen $\frac{0}{0}$ alakú, de mivel -1 közeli környezetben is egyszerűsíthető $x+1$-gyel, amivel az $x = -1$ helyen lévő szakadási hely megszüntethető, és írható:

$$y = \frac{(x-2)(x-\lambda)}{m(x-1)},$$

és a határérték a 3. pont szerint:

$$-6 = \frac{-3(-1-\lambda)}{-2m},$$

amiből

$$1 + \lambda = 4m.$$

A reciprocitás feltételéből:

$$\frac{3-\lambda}{2m} \cdot \frac{2(4-\lambda)}{3m} = 1,$$

ahova beírva az előbbi egyenlőségből a $\lambda = 4m - 1$ értéket, m-re a

$$13m^2 - 36m + 20 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amiből:

$$m_1 = 2 \qquad \text{és} \qquad \lambda_1 = 7,$$

így

$$y = \frac{(x+1)(x-2)(x-7)}{2(x+1)(x-1)}, \text{ vagy a kitűzés szerinti alakban:}$$

$$y = \frac{x^3 - 8x^2 + 5x + 14}{2x^2 - 2} \left(\text{ami egyszerűsítve: } y = \frac{x^2 - 9x + 14}{2x - 2}\right),$$

míg összehasonlítva az adott alakú y kifejezéssel, megkapjuk a kérdezett eggyütthatóértékeket:

$$a_1 = -8; \quad b_1 = 5; \quad c_1 = 14; \quad n_1 = 0; \quad p_1 = -2.$$

Az m-re vonatkozó másodfokú egyenlet második gyöke:

$$m_2 = \frac{10}{13}$$

és a többi érték: $a_2 = -\frac{40}{13}$; $b_2 = \frac{1}{13}$; $c_2 = \frac{54}{13}$; $n_2 = 0; p_2 = -\frac{10}{13}$.

Ekkor a tört:

$$y = \frac{x^3 - \frac{40}{13}x^2 + \frac{1}{13}x + \frac{54}{13}}{\frac{10}{13}x^2 - \frac{10}{13}} = \frac{x^3 - 8x^2 + 5x + 14}{2x^2 - 2},$$

ami $x + 1$-gyel egyszerűsítve:

$$y = \frac{x^2 - 9x + 14}{2x - 2}$$

alakban is írható.

A feladatnak tehát két megoldása van, amelyek közül az első egész számú eggyütthatókat szolgáltat.

Kőváry Károly, Budapest és Marschik Iván, Budapest